الاشتقاق

أنشطة تمهيدية

نشاط1 قابلية الاشتقاق في نقطة :

أحسب $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ في الحالات التالية:

1) $f(x) = x^2$ و $x_0 = 5$

2) $f(x) = 3x^2 - 2x$ و $x_0 = -1$

3 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ و $x_0 = \dfrac{1}{2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+2}$ و $x_0 = -1$

5) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ و $x_0 = 1$

6) $f(x) = \sin x$ و $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

7) $f(x) = x^2.\sin(\dfrac{1}{x}) \quad x \neq 0$; $f(0) = 0$ و $x_0 = 0$

نلاحظ أن هذه النهايات كلها تعطينا عددا ثابتا .

نقول بأن هذه الدوال قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 والعدد : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ يسمى العدد المشتق في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'(x_0)$.

نشاط2 قابلية الاشتقاق على اليمين – على اليسار

أحسب $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ في الحالات التالية :

1) $f(x) = |x^2 - 2x|$ و $x_0 = 0$

2) $f(x) = (x-2)\sqrt{x-2}$ و $x_0 = 2$

3) $f(x) = |x+3|$ و $x_0 = -3$

نلاحظ أن هذه النهايات كلها تعطينا عددا ثابتا .

نقول بأن هذه الدوال قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة x_0 والعدد :

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ يسمى العدد المشتق على اليمين في النقطة x_0 نرمز له ب:

$f'_d(x_0)$.

أحسب: $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ في الحالات التالية :

1) $f(x)=2|x-2|+3x$ و $x_0=2$

2) $f(x)=|\sin x-\tan x|$ و $x_0=0$

3) $\begin{cases} f(x)=2x & x\geq 1 \\ f(x)=3-x & x\prec 1 \end{cases}$ و $x_0=1$

نلاحظ أن هذه النهايات كلها تعطينا عددا ثابتا

نقول بأن هذه الدوال قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة x_0 والعدد :

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ يسمى العدد المشتق على اليسار في النقطة x_0 نرمز له ب:

$f'_g(x_0)$.

نشاط 3

بين ان الدوال التالية غير قابلة للاشتقاق في النقطة x_0

1) $f(x)=|x-3|$ و $x_0=3$

2) $g(x)=x.\sin(\frac{1}{x})\ \ x\neq 0$ ، $g(0)=0$ و $x_0=0$

3) $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $x_0=2$

4) $h(x)=x+1-\sqrt{x^2-1}\ \ x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ ، $h(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ x\in]-1,1[$ و $x_0=1$ أو $x_0=-1$

نشاط4 تقريب دالة بدالة تآلفية

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x^2$

1) أحسب $f(1+h)$ بالنسبة ل $h\in IR$

2) أتمم ملء الجدول التالي:

x	0	0.8	0.99	1	1.01	1.1	2
f(x)	0			1			4
2x-1	-1			1			3

3) أرسم منحنى الدالة f والمستقيم (T) ذو معادلة : $y=2x-1$ على المجال $[1,2]$

المستقيم (T) يسمى المماس للمنحنى في النقطة $M_0(x_0,f(x_0))$

العدد 2 هو العدد المشتق للدالة f في النقطة $x_0=1$

الدالة $x\mapsto 2x-1$ تسمى الدالة التآلقية المماسة للدالة f في النقطة $x_0=1$

<u>نشاط 5</u>

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{1+x}$

1) أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1-\frac{1}{2}x}{x}$

2) نضع : $g(x)=\dfrac{f(x)-1-\frac{1}{2}x}{x}$ بين أن : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

3) بين أن: $\forall x\in[-1,0[\cup]0,+\infty[: f(x)=1+\frac{1}{2}x+x.g(x)$

4) اتمم ملء الجدول التالي:

x	0.2	0.1	0.01	-0.01	-0.1
f(x)	1.095	1.048			
$1+\frac{1}{2}.x$		1.05		0.995	0.95

5) تحقق أن : $\forall x\in[-1,0[\cup]0,+\infty[: f(x)=f(0)+\frac{1}{2}(x-0)+x.g(x)$ وأن العدد المشتق للدالة f في النقطة 0 هو $f'(0)=\frac{1}{2}$

<u>نشاط 6</u>

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{1}{x}$

1) بين أن $\forall h\in]-1,1[: f(1+h)=1-h+\frac{h^2}{1+h}$

2) اتمم ملء الجدول التالي:

h	-0.3	-0.1	-0.01	0.01	0.1
$\frac{h^2}{1+h}$	0.128		0.0001		
1-h	1.03			0.99	

2) أرسم منحنى الدالة f والمستقيم (T) ذو معادلة: $y=-x+2$ على المجال $]0,2]$
ماذا تلاحظ؟.

خلاصة الدرس

1) الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف:

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0
نقول بأن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة g المعرفة ب: $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x إلى x_0
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'(x_0)$

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 وإذا وضعنا $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ فان:
$f(x)=f(x_0)+l(x-x_0)+(x-x_0)g(x)$ مع : $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$
و إذا وضعنا $x=x_0+h$ فان: $f(x_0+h)=f(x_0)+l.h+h.\varphi(h)$ مع: $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$
الدالة : $x\mapsto f(x_0)+l.(x-x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة x_0.
هذه الدالة تمكننا من إعطاء قيم تقريبية ل $f(x)$ بجوار النقطة x_0 .
من خلال الأنشطة يمكننا كتابة $x^2\approx 2x-1$ بجوار1
و $\sqrt{1+x}\simeq 1+\frac{x}{2}$ بجوار0 و $\frac{1}{x}\simeq 2-x$ بجوار1 أو $\frac{1}{1+x}\simeq 1-x$

أمثلة :

1- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=5x^3-2x^2$ و $x_0=2$

لدينا:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{5.(2+h)^3-2.(2+h)^2-32}{h}=$$

$$\frac{40+60h+30h^2+5h^3-8-8h-2h^2-32}{h}=5h^2+28h+52$$

إذن : $f(2+h)=f(2)+52h+h.(28h+5h^2)$ نضع: $\varphi(h)=28h+5h^2$ لدينا:

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

وبالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=2$ والعدد المشتق للدالة f في النقطة 2 هو: $f'(2)=52$

الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة 2 هي : $x\mapsto 32+52.(x-2)$.

2- نعتبر ادالة f المعرفة على IR ب: $f(x)=|x|$

لدينا: $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$

اذن الدالة $g: x\mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ لا تقبل نهاية في 0 ومنه فالدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة0

ب- تأويل هندسي

C_f يرمز لمنحنى الدالة f .

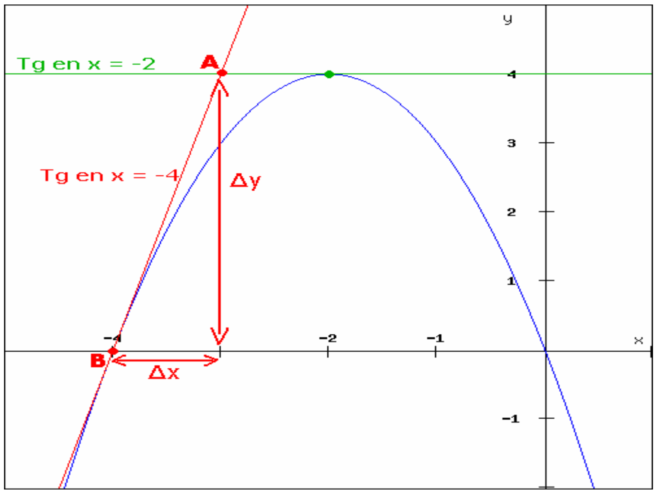
نعتبر النقطتين $A(x_0, f(x_0))$ و $M(x, f(x))$ لدينا $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لكل $x\neq x_0$

يمثل المعامل الموجه للمستقيم (AM) . لما يقترب x من x_0 فان النقطة M تقترب من النقطة A

والمعامل الموجه للمستقيم (AM) يؤول الى $l=f'(x_0)$.نقول بان المستقيم (T) المار من A والذي معامله الموجه هو l هو المستقيم المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A .

معادلة ديكارتية للمماس (T) هي اذن: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.

الشكل



ج- الدالة التآلفية المماسة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0
الدالة المعرفة على IR ب: $u : x \mapsto f(x_0)+(x-x_0).f'(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة x_0 .بجوار x_0 $u(x)$ يعطينا تقريبا ل $f(x)$ نكتب:

$$f(x) \simeq f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)$$

مثال: $f(x)=(1+x)^3$ انطلاقا من منحنى الدالة $g : x \mapsto x^3$ يمكن رسم منحنى الدالة f
لأن $\forall x \in IR : f(x)=g(x+1)$ (باعتبار الازاحة ذات المتجهة $\vec{u}=\vec{i}$)

لدينا: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim \frac{(1+x)^3-1}{x} = \lim \frac{1+3x^2+3x+x^3-1}{x}$ الشكل:

$$= \lim\limits_{x \to 0} 3+3x+3x^2 = 3$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة 0 و $f'(0)=3$ وبالتالي بجوار0 لدينا:

$$(1+x)^3 \simeq 1+3x$$

2) الاشتقاق على اليمين – الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $[x_0, a[$.
نقول بأن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة x_0 إذا كانت النسبة :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

تقبل نهاية منتهية على اليمين في النقطة x_0 .
هذه النهاية تسمى العدد المشتق على اليمين في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'_d(x_0)$

ولدينا : $f'_d(x_0) = \lim \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]b, x_0]$.

نقول بأن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة x_0 إذا كانت النسبة :

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

تقبل نهاية منتهية على اليسار في النقطة x_0.

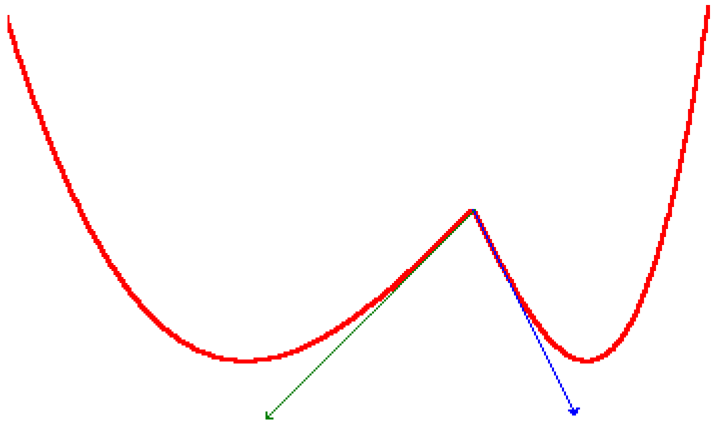
هذه النهاية تسمى العدد المشتق على اليسار في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'_g(x_0)$

ولدينا : $f'_g(x_0) = \lim \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ب - **تأويل هندسي**

C_f يرمز لمنحنى الدالة f .

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين (أو على اليسار) في النقطة x_0
فان المنحنى يقبل نصف مماس في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامله الموجه هو : $f'_d(x_0)$
(أو $f'_g(x_0)$).



Courbe qui admet deux demi-tangentes

ملاحظة:

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في النقطة x_0 وكان لدينا : $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

أمثلة:

1- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x^2+|x|$

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1=1$

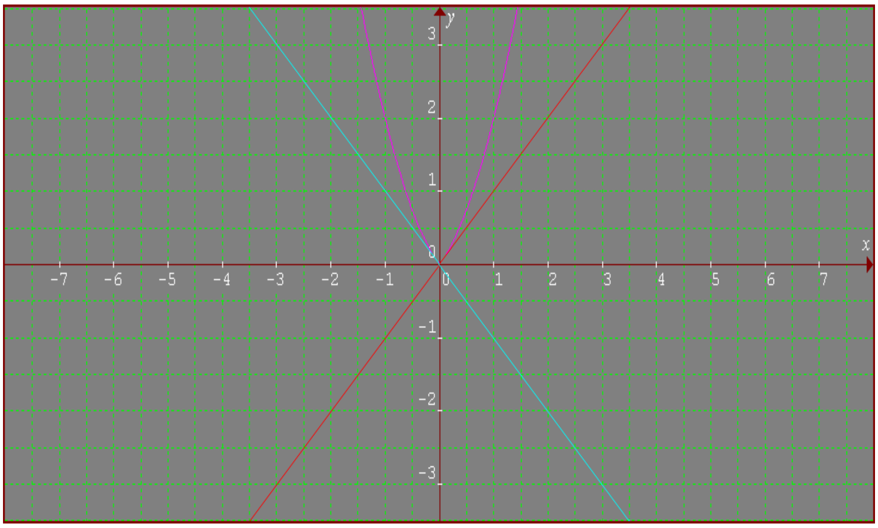
و $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim \dfrac{x^2-x}{x} = \lim x-1=-1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في النقطة 0

ولكنها غير قابلة للاشتقاق في النقطة 0 ولدينا : $f'_d(0)=1$ و $f'_g(0)=-1$

النقطة $O(0,f(0))$ تسمى نقطة مزواة لأن النصفي مماسين للمنحنى في هذه النقطة يكونان زاوية غير مستقيمية.

الشكل:



2- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=|x^2-1|$

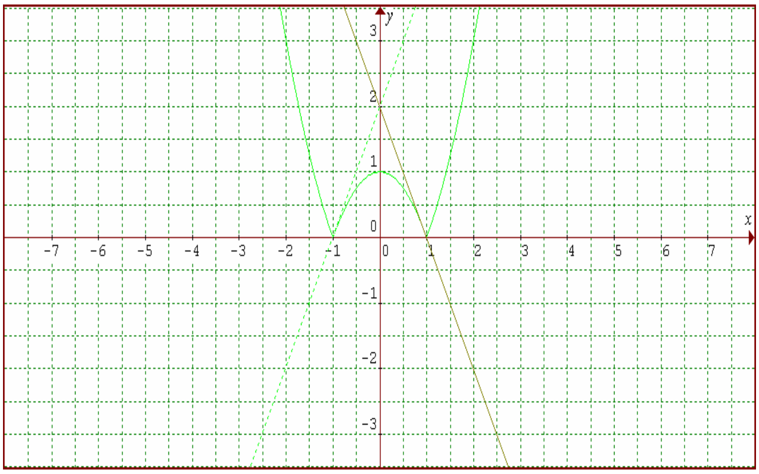
لندرس قابلة اشتقاق الدالة في النقطة -1 :

لدينا : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1-x^2-0}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} 1-x = 2$

و $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-1-0}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} x-1=-2$

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في النقطة -1 ولكنها غير قابلة للاشتقاق في النقطة -1 لدينا إذن نقطة مزواة $A(-1,0)$. وبما أن الدالة زوجية فيمكن أن نقول بان النقطة $B(1,0)$ هي أيضا نقطة مزواة.

الشكل:



3- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{x-3}$

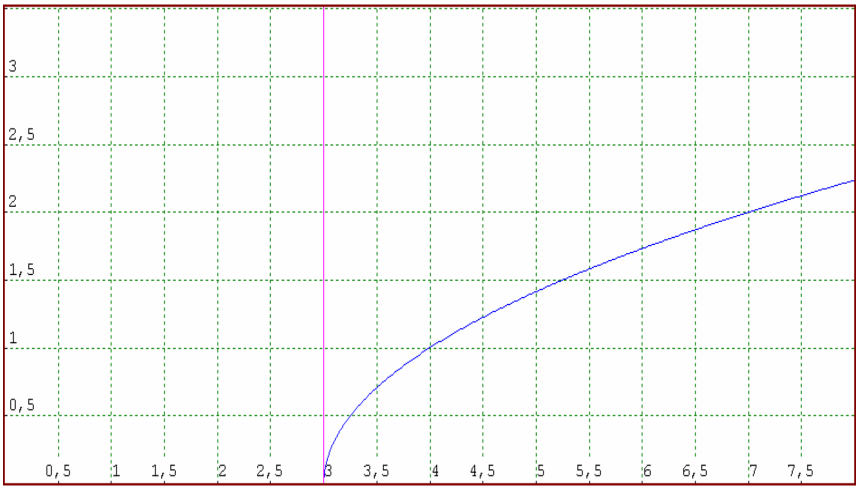
لدينا مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=[3,+\infty[$

و : $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\dfrac{\sqrt{x-3}-0}{x-3}=\lim\dfrac{\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-3})^2}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}=+\infty$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 3 .والمنحنى يقبل نصف مماس عمودي

في النقطة $A(3,0)$.

الشكل:



3) **الدالة المشتقة**

أ- المشتقة الأولى

تعريف1

نقول بان دالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح $I=]a,b[$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

تعريف2

نقول بان دالة f قابلة للاشتقاق على مجال مغلق $I=[a,b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ وكانت قابلة للاشتقاق على اليمين في a وعلى اليسار في b.

وبنفس الطريقة نعرف الاشتقاق على مجال شبه مفتوح .

تعريف3

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة المعرفة على I بما يلي : $x\mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f نرمز لها ب: f'